

4. Собствени стойности и собствени вектори на матрици

Постановка на задачата

Много задачи се свеждат до решаване на системата:

$$Ax = \lambda x,$$

където λ е неизвестно число, A – матрица $n \times n$.

Всеки ненулев вектор x , който удовлетворява това равенство се нарича **собствен вектор** на матрицата A , съответстващ на **собствената стойност** λ . Множеството от всички собствени стойности на A се нарича **спектр на матрицата A** . Собствените стойности на A са корени на алгебричното уравнение

$$\text{Det}(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n) = 0,$$

което се нарича **характеристично уравнение** на матрицата A и се бележи с $P_n(\lambda) = 0$.

Задачата се свежда до:

1. Намиране коефициентите на характеристичното уравнение $P_n(\lambda) = 0$.
2. Намиране корените на характеристичното уравнение, т.е. собствените стойности на матрицата A .
3. Намиране на ненулевите решения на хомогенната система $Ax = \lambda x$, за всяко намерено λ , т.е. собствените вектори на A .

Непосредственото намиране на коефициентите на характеристичното уравнение, неговите корени и решението на системата за всяко λ , обикновено води до голям брой изчисления, грешки от закръгляния и за това не се прилага при решаване на практически задачи. Използват се други методи: метод на Ланцош, Крилов, Данилевски, Якоби, степенен метод, които са разгледани подробно в [1-2].

4.1. Метод на Ланцош. Метод на биортогонализация

Необходими формули

I. Формули за характеристичния полином $P_n(\lambda)$ за произволна матрица $A(n \times n)$ (процес на ортогонализация) :

$$\vec{c}^{(0)} = \vec{0}, \quad \vec{c}^{(m+1)} = A\vec{c}^{(m)} + \alpha_{m+1,m}\vec{c}^{(m)} + \dots + \alpha_{m+1,0}\vec{c}^{(0)},$$

където

$$\alpha_{m+1,i} = -(A\vec{c}^{(m)}, \vec{c}^{(i)}) / (\vec{c}^{(i)}, \vec{c}^{(i)}), \quad i = \overline{0, m}, \quad m = \overline{0, n-1}.$$

Ако

$$\vec{c}^{(m+1)} = \vec{0} \rightarrow P_{m+1}(\lambda) / P_n(\lambda):$$

$$P_{m+1}(\lambda) = (\lambda + \alpha_{m+1,m})P_m(\lambda) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{m+1,i}P_i(\lambda), \quad P_0(\lambda) = 1.$$

От теорията имаме: $\max(m+1) = n$. Тогава $P_n(\lambda) = P_{m+1}(\lambda)$ е характеристичният полином на A .

Ако $A = A^T$, то $\alpha_{m+1,i} = 0$ за $i = \overline{0, m-2}$.

II. Процес на биортогонализация:

Избираме два ненулеви начални вектора $\vec{c}^{(0)}, \vec{b}^{(0)} \neq \vec{0}$ и построяваме редиците:

$$\vec{c}^{(0)}, \vec{c}^{(1)}, \dots, \vec{c}^{(m)}, \dots$$

$$\text{и } \vec{b}^{(0)}, \vec{b}^{(1)}, \dots; (\vec{c}^{(m+1)}, \vec{b}^{(i)}) = (\vec{b}^{(m+1)}, \vec{c}^{(i)}) = 0, \quad i = \overline{0, m-2},$$

$$\vec{c}^{(m+1)} = A\vec{c}^{(m)} + \alpha_{m+1,m}\vec{c}^{(m)} + \alpha_{m+1,m-1}\vec{c}^{(m-1)},$$

$$\vec{b}^{(m+1)} = A^T \vec{b}^{(m)} + \beta_{m+1,m}\vec{b}^{(m)} + \beta_{m+1,m-1}\vec{b}^{(m-1)}, \quad \alpha_{m+1,i} = \beta_{m+1,i},$$

$$\alpha_{m+1,i} = -\frac{(A\vec{c}^{(m)}, \vec{b}^{(i)})}{(\vec{c}^{(i)}, \vec{b}^{(i)})}, \quad \beta_{m+1,i} = -\frac{(A^T \vec{b}^{(m)}, \vec{c}^{(i)})}{(\vec{c}^{(i)}, \vec{b}^{(i)})}, \quad i = \overline{m-1, m},$$

$$\vec{c}^{(m+1)} = \vec{0} \Rightarrow P_{m+1}(\lambda) / P_n(\lambda):$$

$$P_{m+1}(\lambda) = (\lambda + \alpha_{m+1,m})P_m(\lambda) + \alpha_{m+1,m-1}P_{m-1}(\lambda),$$

$$P_0(\lambda) = 1, \quad P_1(\lambda) = \lambda + \alpha_{10},$$

$$\vec{b}^{(m+1)} = \vec{0} \Rightarrow Q_{m+1}(\lambda) + \alpha_{m+1,m} / P_n(\lambda):$$

$$Q_{m+1}(\lambda) = (\lambda + \beta_{m+1,m})Q_m(\lambda) + \beta_{m+1,m-1}Q_{m-1}(\lambda),$$

$$Q_0(\lambda) = 1, \quad Q_1(\lambda) = \lambda + \beta_{10},$$

III. Формули за собствен вектор

$$\vec{x} = \gamma_0 \vec{c}^{(0)} + \gamma_1 \vec{c}^{(1)} + \dots + \gamma_m \vec{c}^{(m)}, \quad \vec{c}^{(m+1)} = \vec{0}, \quad A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$\gamma_0 A\vec{c}^{(0)} + \gamma_1 A\vec{c}^{(1)} + \dots + \gamma_m A\vec{c}^{(m)} = \lambda_k \gamma_0 \vec{c}^{(0)} + \lambda_k \gamma_1 \vec{c}^{(1)} + \dots + \lambda_k \gamma_m \vec{c}^{(m)}$$

Системата, от която се намират γ_i :

$$\gamma_0(\alpha_{10} + \lambda_k) + \gamma_1 \alpha_{20} = 0$$

$$\gamma_1(\alpha_{21} + \lambda_k) + \gamma_2 \alpha_{31} - \gamma_0 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\gamma_{m-1}(\alpha_{m,m-1} + \lambda_k) + \gamma_m \alpha_{m+1,m-1} - \gamma_{m-2} = 0$$

$$\gamma_m(\alpha_{m+1,m} + \lambda_k) - \gamma_{m-1} = 0$$

Пример 1. Дадена е симетричната матрица A . С начален вектор $\vec{c}^{(0)} = (0,0,1)^T$ да се реши задачата за собствените стойности и собствените вектори по метода на Ланцош.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -4 \\ -2 & 14 & -4 \\ -4 & -4 & 18 \end{bmatrix}.$$

Решение: За простота означаваме $\vec{c}^{(0)} \equiv c^0$. Пресмятаме последователно

$$c^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ac^0 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 18 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad c^1 = Ac^0 + \alpha_{10}c^0; \quad \alpha_{10} = -18$$

$$P_1(\lambda) = \lambda - 18; \quad c^1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Ac^1 = -4 \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$c^2 = Ac^1 + \alpha_{21}c^1 + \alpha_{20}c^0; \quad \alpha_{21} = -19/2; \quad \alpha_{20} = -32$$

$$P_2(\lambda) = (\lambda - 19/2)P_1 - 32; \quad c^2 = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Ac^2 = 10 \begin{pmatrix} 11 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$c^3 = Ac^2 + \alpha_{32}c^2 + \alpha_{31}c^1 + \alpha_{30}c^0$$

Тук имаме $\alpha_{30} = 0$, тъй като A е симетрична; $\alpha_{32} = -27/2$; $\alpha_{31} = -25/4$, $c^3 = 0$, от $n = 3$

$$P_3(\lambda) = (\lambda - \frac{27}{2})P_2(\lambda) - \frac{25}{4}P_1(\lambda) = \lambda^3 - 41\lambda^2 + 504\lambda - 1764,$$

$$P_3(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_{1,2,3} = 21; 14; 6.$$

За $\lambda = 21$ собствения вектор x търсим във вида: $x = \gamma_0 c^0 + \gamma_1 c^1 + \gamma_2 c^2$. Стойностите на $\gamma_{0,1,2}$ намираме от системата: $Ax = 21x \Leftrightarrow$

$$\gamma_0 Ac^0 + \gamma_1 Ac^1 + \gamma_2 Ac^2 = 21\gamma_0 c^0 + 21\gamma_1 c^1 + 21\gamma_2 c^2 \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0(c^1 + 18c^0) + \gamma_1(c^2 + \frac{19}{2}c^1 + 32c^0) + \gamma_2(\frac{27}{2}c^2 + \frac{25}{4}c^1)$$

$$= 21\gamma_0 c^0 + 21\gamma_1 c^1 + 21\gamma_2 c^2$$

Приравняваме коефициентите пред c^0, c^1, c^2 :

$$c^0: 18\gamma_0 + 32\gamma_1 = 21\gamma_0 \quad \gamma_0(-18 + 21) + \gamma_1(-32) = 0$$

$$c^1: \gamma_0 + \frac{19}{2}\gamma_1 + \frac{25}{4}\gamma_2 = 21\gamma_1 \quad \text{или от III} \quad \gamma_1(-\frac{19}{2} + 21) + (-\frac{25}{4})\gamma_2 - \gamma_0 = 0$$

$$c^2: \gamma_1 + \frac{27}{2}\gamma_2 = 21\gamma_2 \quad \gamma_2(-\frac{27}{2} + 21) - \gamma_1 = 0$$

Хомогенната система има безброй решения и нека $\gamma_0 = 160$; $\gamma_1 = 15$; $\gamma_2 = 2$. Тогава

$$x = 160(0,0,1)^T + 15(-4)(1,1,0)^T + 2 \cdot 10(1,-1,0)^T = (-40,-80,160)^T \Leftrightarrow x = (1,2,-4)^T.$$

Аналогично се намират собствени вектори на $\lambda = 14 \Leftrightarrow x = (-2,3,1)$;

$$\lambda = 6 \Leftrightarrow x = (2,1,1).$$

Нормираните собствени вектори x са:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. С помощта на биортогонализация да се намерят собствените стойности и собствените вектори на матрицата:

$$A = \begin{bmatrix} 1,875 & -8,625 & -4,25 \\ -0,625 & 0,875 & -1,25 \\ 0,125 & -0,375 & 4,25 \end{bmatrix}.$$

а) $c^0 = b^0 = (1,0,0)^T$ - решена;

б) $c^0 = b^0 = (0,0,1)^T$ - достига се до $b^2 = (0,0,0)^T$ и се решава частично проблема;

в) $c^0 = b^0 = (0,1,0)^T$ - аналогично на б).

m	c^m	b^m	Ac^m	$A^T b^m$	$\alpha_{m+1,m}$	$\alpha_{m+1,m-1}$	P_{m+1}
0	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,875 \\ -0,625 \\ 0,125 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,875 \\ -8,625 \\ -4,25 \end{pmatrix}$	1,875		$\lambda - 1,875$
1	$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ -69 \\ -34 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 311 \\ -45 \\ 49 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 311 \\ -381 \\ -466 \end{pmatrix}$	$-\frac{1439}{8 \cdot (311)}$	$-\frac{311}{64}$	$(\lambda - \frac{1439}{8 \cdot (311)})P_1 - \frac{311}{64}$
2	$\frac{25}{8 \cdot (311)} \begin{pmatrix} 0 \\ -34 \\ 69 \end{pmatrix}$	$-\frac{300}{311} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\frac{25}{4 \cdot (311)} \begin{pmatrix} 0 \\ -58 \\ 153 \end{pmatrix}$	$\frac{300}{311} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -20 \end{pmatrix}$	$-\frac{1414}{311}$	$\frac{60000}{311^2}$	$(\lambda - \frac{1414}{311})P_2 + 60000 P_1$

$P_3(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 8\lambda + 16$ - характеристичен полином. Корените на $P_3(\lambda) = 0$ са:
 $\lambda_{1,2} = 4$; $\lambda_3 = -1$.

Собствените вектори на A , аналогично на Пример 1, се търсят във вида:

$$x = \gamma_0 c^0 + \gamma_1 c^1 + \gamma_2 c^2$$

и са решение на системата: $Ax = \lambda x \Leftrightarrow$

$$\text{За } \lambda = 4 : \begin{cases} (-\frac{15}{8} + 4)\gamma_0 + (-\frac{311}{64})\gamma_1 = 0 \\ -\gamma_0 + (-\frac{1439}{8 \cdot (311)} + 4)\gamma_1 + (-\frac{60000}{311^2})\gamma_2 = 0 \\ -\gamma_1 + (-\frac{1414}{311} + 4)\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Едно решение на хомогенната система е: $\gamma_0 = \frac{1}{136}$; $\gamma_1 = \frac{1}{311}$; $\gamma_2 = \frac{1}{170}$,

откъдето $x = (2, 0, -1)^T$, нормираният вектор $x = (2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5})^T$.

За $\lambda = -1$, аналогично се намира $x = (3, -1, 0)^T$ или $(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, 0)^T$.

Пример 3. С помощта на биортогонализация да се намерят собствените стойности и

собствените вектори на матрицата $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

а) $c^0 = b^0 = (0, 1, 0, 0)^T$ – виж [1];

б) $c^0 = b^0 = (0, 0, 1, 0)^T$ – намира се делител на характеристичния полином

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9;$$

в) $c^0 = b^0 = (0, 0, 0, 1)^T$ – решена.

$$c^0 = b^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad Ac^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad A^T b^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{10} = \beta_{10} = -3$$

$$c^1 = Ac^0 + \alpha_{10}c^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad b^1 = A^T b^0 + \beta_{10}b^0 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_1(\lambda) = \lambda - 3$$

$$c^2 = Ac^1 + \alpha_{21}c^1 + \alpha_{20}c^0; \quad Ac^1 = -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A^T b^1 = 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad c^2 = -3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad b^2 = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{21} = -6; \quad \alpha_{20} = 3; \quad P_2(\lambda) = (\lambda - 6)P_1(\lambda) + 3.$$

$$Ac^2 = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A^T b^2 = -9 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_{32} = -3; \quad \alpha_{31} = -3 \rightarrow c^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad b^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

При $c^3 = 0$ полиномът $P_3(\lambda) = (\lambda - 3)P_2(\lambda) - 3P_1(\lambda)$ е делител на характеристичния полином.

Корените на $P_3(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 45\lambda - 54 = 0$ са $\lambda_{1,2,3} = 3; 3; 6; \lambda_4 = ?$

Използваме $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = Sp(A)$, $Sp(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} \rightarrow \lambda_4 = 3$.

Собствени вектори: За $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} (-3+3)\gamma_0 + 3\gamma_1 = 0 \\ (-6+3)\gamma_1 - 3\gamma_2 - \gamma_0 = 0 \\ -\gamma_1 + (-3+3)\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Системата има безброй решения и едно е: $\gamma_0 = -3; \gamma_1 = 0; \gamma_2 = 1 \rightarrow$

$x \sim (0, 1, 1, 1)$.

За $\lambda = 6$ се получава системата:

$$\begin{cases} (-3+6)\gamma_0 + 3\gamma_1 = 0 \\ (-6+6)\gamma_1 - 3\gamma_2 - \gamma_0 = 0 \\ -\gamma_1 + (-3+6)\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Решенията са: $\gamma_0 = -3; \gamma_1 = 3; \gamma_2 = 1 \rightarrow x \sim (1, 1, 0, 1)$.

Пример 4. За произволна матрица (несиметрична) да се намерят $\lambda, P(\lambda), x$ (без биортогонализация):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ с начален вектор } c^0 = (0, 1, 0)^T.$$

Решение:

Резултатите са подредени в таблицата:

m	c^i	Ac^i	$\alpha_{m,i}$	$P_i(\lambda)$
0	$(0, 1, 0)^T$	$(-2, 1, 3)^T$		1
1	$(-2, 0, 3)^T$	$(5, 1, -5)^T$	$\alpha_{1,0} = -1$	$P_1(\lambda) = \lambda - 1$

2	$\frac{5}{13}(3,0,2)^T$	$\frac{5}{13}(12,5,1)^T$	$\alpha_{2,1} = \frac{25}{13}; \quad \alpha_{2,0} = -1$	$P_2(\lambda) = \lambda^2 + \frac{12}{13}\lambda - \frac{38}{13}$
3	$(0,0,0)^T$		$\alpha_{3,2} = -\frac{38}{13};$ $\alpha_{3,1} = \frac{105}{169};$ $\alpha_{3,0} = -\frac{25}{13}$	$P_3(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$

Корените на $P_3(\lambda) = 0$ са: 3, -2, 1.

За $\lambda = 3$, от системата III: $x = (1,1,1)^T$; за $\lambda = 1$, $x = (1,-1,-1)^T$; за $\lambda = -2$,
 $x = (11,1,-14)^T$.

Задачи за упражнения

Да се намерят характеристичният полином $P(\lambda)$, собствените стойности λ и собствените вектори x на матриците:

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

а) $c^0 = (0,1,0)^T$, $P_3(\lambda) = ?$ (пример 4);

б) $c^0 = (1,0,0)^T$, $P_2(\lambda)$ е делител на $P_3(\lambda) = ?$;

в) с биортогонализация и $c^0 = b^0 = (0,0,1)^T$.

Отговор: $P_3(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$

$\lambda = 3$, $x = (1,1,1)^T$; $\lambda = -2$, $x = (11,1,-14)^T$; $\lambda = 1$, $x = (-1,1,1)^T$.

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

а) $c^0 = (1,0,0)^T$,

б) $c^0 = b^0 = (1,0,0)^T$ при биортогонализация.

Отговор: $P_3(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 19\lambda + 89$; λ се намират с метод за решаване на нелинейно уравнение: $\lambda_1 \approx -4,284$; $\lambda_2 = 3,761$; $\lambda_3 = 5,522$.

Собствените вектори могат да се намерят програмно.

$$3) \quad A = \begin{bmatrix} 16 & -24 & 18 \\ 3 & -2 & 0 \\ -9 & 18 & -17 \end{bmatrix}$$

а) $c^0 = (1,1,1)^T$. Да се намери делител $P_2(\lambda)$.

б) $c^0 = (0,0,1)^T$, $P_3(\lambda) = ?$

Отговор: $P_3(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 36\lambda + 32$,

$\lambda = 1, x = (2,2,1)^T$; $\lambda = 4, x = (2,1,0)^T$; $\lambda = -8, x = (-2,1,4)^T$.

$$4) \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{при } c^0 = (0,1,0,0)^T$$

Отговор: $P_3(\lambda) = \lambda^3 - 19\lambda^2 + 55\lambda + 75$ - делител на характеристичния полином. $\lambda_{1,2} = 5$, $x = (-1,0,0,1)^T$; $\lambda_3 = -1$, $x = (1,-1,-1,1)^T$; $\lambda_3 = 15$, $x = (1,1,1,1)^T$.

$$5) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad c^0 = (1,0,0)^T.$$

Отговор: $P_3(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 48\lambda + 108$;

$\lambda_1 = 2, x = (1,-1,0)^T$; $\lambda_2 = -6, x = (-1,-1,2)^T$; $\lambda_3 = 9, x = (1,1,1)^T$.

$$6) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

а) $c^0 = (1,0,0,0)^T$,

б) $c^0 = (0,0,0,1)^T$.

Отговор: $P_3(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + 2\lambda - 3$, собствените стойности се намират приближено.

$$7) \quad A = \begin{bmatrix} -6 & -80 & 290 & 80 \\ -1 & -60 & 119 & 26 \\ -1 & -100 & 180 & 37 \\ 2 & 312 & -529 & -104 \end{bmatrix}$$

Отговор: $P_4(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24$;

$$\lambda = 1; 2; 3; 4; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 130 \\ 21 \\ 23 \\ -51 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 90 \\ 15 \\ 16 \\ -34 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 70 \\ 11 \\ 11 \\ -21 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 64 \\ 9 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

4.2. Метод на Якоби (метод на въртене)

Решава пълно задачата за собствени стойности и собствени вектори на симетрична матрица. Практически се прилага като компютърен метод. Използва се факта от алгебрата, че ако A е симетрична, то съществува ортогонална матрица U (т.е. $U^T = U^{-1}$), за която $D = U^{-1}AU$ е диагонална. И ако λ е собствена стойност на $A \Rightarrow \lambda$ е собствена стойност на D , то собствените стойности λ съвпадат с диагоналните елементи (d_{ii}) на D .

Алгоритъм

Нека $A_0 = A$, $A_k = U_k^{-1} \cdot A_{k-1} \cdot U_k$, където U_k е редица от двумерни преобразования ($U_1, U_2, U_3, \dots (= U)$), всяко от които има вида:

$$U_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & s & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & s & \cdot & \cdot & -c & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

m
 l

където $c^2 + s^2 = 1$; извъндиагоналните елементи, освен означените елементи c и s , са равни на 0; c и s могат да се третират като $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$, а φ - ъгъл на въртене. Ако имаме за цел да направим елемента a_{ml} равен на нула, то c и s трябва да изберем по формулите:

$$c = \sqrt{\frac{1+p}{2}}, \quad s = \varepsilon \sqrt{\frac{1-p}{2}},$$

където

$$p = \sqrt{1 - \frac{(2a_{ml})^2}{(a_{mm} - a_{ll})^2 + (2a_{ml})^2}} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \begin{cases} \text{sign}(a_{ml}), & a_{mm} = a_{ll} \\ \text{sign} \frac{a_{mm} - a_{ll}}{a_{ml}}, & a_{mm} \neq a_{ll} \end{cases}$$

Тогава получаваме матрицата $B = U_k^{-1} \cdot A \cdot U_k$ с изменени m и l редове и стълбове:

$$b_{mm} = c^2 a_{mm} + s^2 a_{ll} + 2csa_{ml}, \quad b_{ll} = s^2 a_{mm} + c^2 a_{ll} - 2csa_{ml},$$

$$b_{ml} = b_{lm} = 0,$$

$$b_{mj} = b_{jm} = ca_{jm} + sa_{jl}, \quad b_{lj} = b_{jl} = sa_{jm} - ca_{jl}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq m, \quad j \neq l,$$

$$b_{jm} = a_{jm} \text{ в останалите случаи.}$$

Забележка. Последните формули за елементите на B да се използват при програмиране на метода. Методът на Якоби изисква голям обем изчисления, като с компютър не е задължително да се избира за a_{ml} най-големия по модул елемент от извъндиагоналните (така се смята на ръка), а се обработват последователно тези елементи. От друга страна методът е устойчив и приложим даже в случай на кратни корени.

Пример. С точност $\varepsilon = 10^{-1}$ да се пресметнат собствените стойности и вектори на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение:

Получаваме следната схема (изчисленията са с два-три знака след десетичната запетая):

m, l	c, s	U_k	A_k
1, 3	0,828 0,561	$\begin{pmatrix} 0,828 & 0 & 0,561 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,561 & 0 & -0,828 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6,387 & 3,633 & 0,004 \\ 3,633 & 3 & 3,579 \\ 0,004 & 3,579 & -4,386 \end{pmatrix}$
1, 2	0,843 0,538	$\begin{pmatrix} 0,843 & 0,538 & 0 \\ 0,538 & -0,843 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8,703 & 0,006 & -1,922 \\ 0,006 & 0,685 & 3,019 \\ -1,922 & 3,019 & -4,386 \end{pmatrix}$
2, 3	0,906 0,422	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,906 & 0,422 \\ 0 & 0,422 & -0,906 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8,703 & -0,806 & 1,744 \\ -0,806 & 2,090 & -0,002 \\ 1,744 & -0,002 & -5,787 \end{pmatrix}$

1, 3	0,993 0,118	$\begin{pmatrix} 0,993 & 0 & 0,118 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,118 & 0 & -0,993 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8,910 & -0,801 & 0,002 \\ -0,801 & 2,090 & -0,093 \\ 0,002 & -0,093 & -5,994 \end{pmatrix}$
1, 2	0,993 -0,114	$\begin{pmatrix} 0,993 & -0,114 & 0 \\ -0,114 & -0,993 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8,994 & 0,007 & 0,013 \\ 0,007 & 1,995 & 0,092 \\ 0,013 & 0,092 & -5,994 \end{pmatrix}$

m, l в случая са индекси на $\max(|a_{i,j}|)$ при $i \neq j$. Изчисленията се извършват докато извън диагоналните елементи станат приблизително равни на нула с точност ε . По диагонала са собствените стойности с точност ε , следователно $\lambda_1 \approx 9,0$; $\lambda_2 \approx 2,0$; $\lambda_3 \approx -6,0$. Собствените вектори на A са приблизително равни на стълбовете на матрицата $U_1.U_2...U_k$, съответстващи на λ_i :

$$U_1.U_2...U_5 = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,7 & -0,4 \\ 0,6 & 0,7 & -0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} -$$

матрица от нормираните вектори.

Задачи за упражнения

1) Да се приложи методът на Якоби за намиране на собствените стойности и вектори с точност $\varepsilon = 10^{-1}$; 10^{-2} ; 10^{-3} на матрицата:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Отговор: $\lambda_1 \approx 3,4142$, $x_1 \sim (0,7071, -1, 0,7071)^T$;

$\lambda_2 \approx 0,5858$, $x_2 \sim (0,7071, 1, 0,7071)^T$; $\lambda_3 \approx 2,0000$, $x_3 \sim (1, 0, -1)^T$.

2) Да се решат с метода на Якоби някои от поставените задачи в глава 4 (при симетрични матрици) с различна точност ε .

4.3. Решаване частичния проблем за собствени стойности. Степенен метод

Понякога е нужна само най-голямата по модул собствена стойност λ . Известно е [1,2], че

$$\frac{A^{k+1}y_j^0}{A^k y_j^0} \approx \lambda, j = \overline{1, n},$$

където $\vec{y}^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$ е произволен n -мерен вектор, $\vec{y}^0 \neq \vec{0}$.

Препоръчва се на всяка стъпка да се нормира полученият вектор, така че най-голямата му компонента да е 1. На последната стъпка нормирацият множител ще даде стойността на най-голямата по модул собствена стойност. Заедно с това се получава и собственият вектор.

Пример. Да се изчисли най-голямата по модул собствена стойност на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и нейният собствен вектор.

Решение:

Нека

$$y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A y^0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \quad A^2 y^0 = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 3 \\ 1,2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,625 \\ 0,25 \end{pmatrix},$$

$$A^3 y^0 = \begin{pmatrix} 4,625 \\ 2,5 \\ 0,875 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5405 \\ 0,1892 \end{pmatrix}, \quad A^4 y^0 = \begin{pmatrix} 4,5405 \\ 2,2702 \\ 0,7297 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,499 \\ 0,1607 \end{pmatrix},$$

$$A^5 y^0 = \begin{pmatrix} 4,4999 \\ 2,1605 \\ 0,6606 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,4801 \\ 0,1468 \end{pmatrix}, \quad A^6 y^0 = \begin{pmatrix} 4,4801 \\ 2,107 \\ 0,6269 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0,4703 \\ 0,1399 \end{pmatrix},$$

$$\frac{A^6 y_j^0}{A^5 y_j^0} = (1; 0,98; 0,95)^T \rightarrow A^6 y^0 \approx A^5 y^0$$

с точност $\varepsilon = 0,05 \rightarrow \lambda = 4,48$ $x = (1; 0,47; 0,14)^T$.

Задачи за упражнения

Използвайки степенния метод, да се изчисли $\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ за матрицата A със

зададена точност $\varepsilon = 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}$:

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 16 & -24 & -18 \\ 3 & -2 & 0 \\ -9 & 18 & -17 \end{bmatrix}$$

Отговор: $\lambda = -8$; $x = (-2, 1, 4)^T$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Отговор: $\lambda = 9$; $x = (0,97; 1; 0,99)^T \approx (1,1,1)^T$

$$3) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Отговор: $\lambda = 8,3874$; $x = (0,8077; 0,772; 1)^T$

$$4) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Отговор: $\lambda = 3,618$, $x = (0,37; -0,6; 0,6; -0,37)^T$.

4.4. Собствени стойности на тридиагонални матрици

С помощта на някои теореми за локализация се получават груби оценки за разположението на собствените стойности на матрицата A .

$$\|A\|_{\lambda} = \max_{k=1,n} |\lambda_k| - \text{спектрална норма на матрица} \Rightarrow |\lambda_k| \leq \|A\|_{\lambda}$$

Лема на Гершгорин

Собствените стойности λ на A лежат в обединението на кръговете (*) – кръгове на Гершгорин. Изолиран кръг съдържа една собствена стойност:

$$(*) \quad |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = r_i, \text{ поне за едно } i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

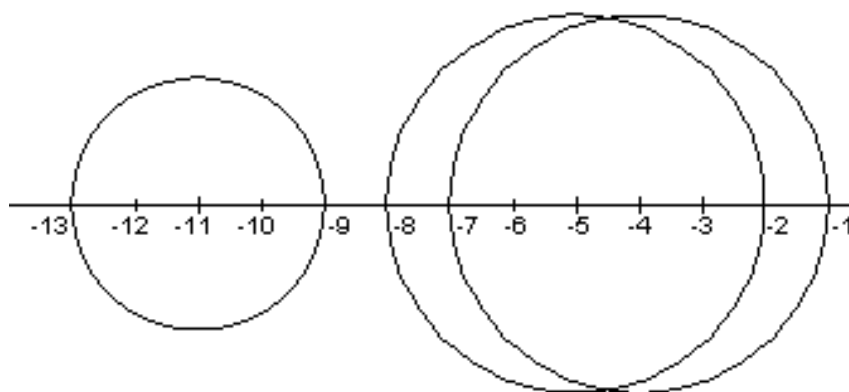
Примери. Да се локализируют собствените стойности λ на матриците:

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

Решение:

$$a_{11} = -5, \quad r_1 = 3; \quad a_{22} = -4, \quad r_2 = 3; \quad a_{33} = -11, \quad r_3 = 2.$$

Кръгове на Гершгорин:

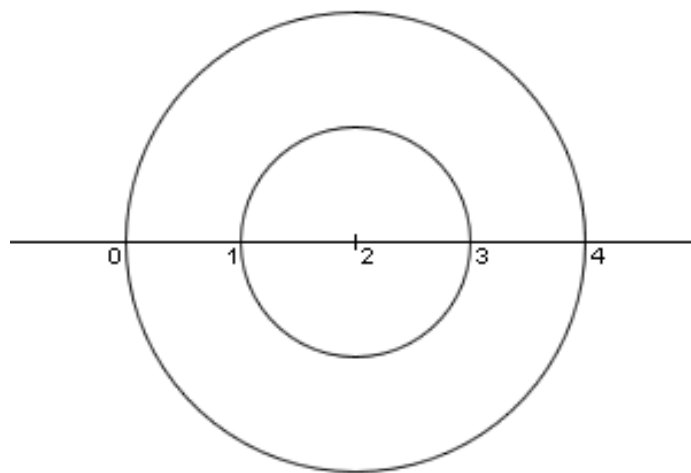


$$\lambda_1 \in [-13, -9]; \quad \lambda_{2,3} \in [-8, -1].$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Решение:

$$a_{11} = 2, \quad r_1 = 1; \quad a_{22} = 2, \quad r_2 = 2; \quad a_{33} = 2, \quad r_3 = 1.$$



$$3) \quad A = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{Отговор: } \lambda \in [-7/8, -1/16]$$

$$4) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 1,01 \end{bmatrix}, \quad a_{11} = 2, \quad r_1 = 0,2; \quad a_{22} = 1, \quad r_2 = 0,2; \quad a_{33} = 1,01, \quad r_3 = 0,2.$$

Отговор: $\lambda_{1,2} \in [0,8; 1,21]; \quad \lambda_3 \in [1,8; 2,2].$

Собствени стойности на тридиагонални матрици

$$\text{Нека } A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

$$D_n(\lambda) = \det|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} b_1 - \lambda & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} - \lambda & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_n & b_n - \lambda \end{vmatrix} = (b_n - \lambda)D_{n-1} - c_{n-1}a_n D_{n-2}.$$

Рекурентна връзка

$$D_n(\lambda) = (b_n - \lambda)D_{n-1}(\lambda) - c_{n-1}a_n D_{n-2}(\lambda), \quad D_1(\lambda) = b_1 - \lambda, \quad D_0(\lambda) = 1.$$

При локализиран корен на характеристичния полином може да се приложи итерационен метод за решаване на $D_n(\lambda) = 0$ с помощта на рекурентната връзка (напр. метод на разполовяване и др.) .

Частен случай: При симетрична тридиагонална матрица корените на $D_k(\lambda)$ разделят корените на $D_{k+1}(\lambda)$ ([5]).

Пример: Да се определят собствените стойности и вектори на матрицата:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение:

По Гершгорин се определя $\lambda \in [0;4]$.

$D_1(\lambda) = 2 - \lambda$ с корен $\lambda = 2$, който дели $[0;4]$ на $[0;2]$ и $(2;4]$.

$D_2(\lambda) = (2 - \lambda)D_1 - D_0 = (2 - \lambda)^2 - 1 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$ разделят корените на $D_3(\lambda)$.

Следователно корените на D_3 принадлежат на $[0;1) \cup (1;3) \cup (3;4]$.

$D_3(\lambda) = (2 - \lambda)D_2 - D_1 = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$, $D_3(\lambda) = 0$ за $\lambda_1 = 2$; $\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$.

Следователно корените на $D_4(\lambda)$ са в интервалите:

$[0;2-\sqrt{2}) \cup (2-\sqrt{2},2) \cup (2;2+\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2};4]$.

Нека изчислим $\lambda \in [0;2-\sqrt{2}]$ по метода на разполовяване като използваме рекурентната формула:

a	b	$(a+b)/2$	$D_1(\lambda)$	$D_2(\lambda)$	$D_3(\lambda)$	$D_4(\lambda)$
0 +	0,5858 -	0,2929 +	1,7071	1,9142	1,5606	0,7499
0,2929 +	0,5858 -	0,4394 -	1,5607	1,4356	0,6799	-0,3746
0,2929 +	0,4394 -	0,3661 +	1,6339	1,6696	1,0941	0,1180
0,3661 +	0,4394 -	0,4028 -	1,5973	1,5512	0,8804	-0,2316
0,3661 +	0,4028 -	0,3845 -	1,6155	1,6100	0,9855	-0,0289
0,3661 +	0,3845 -	0,3753 +	1,6247	1,6397	1,0392	0,0793
0,3753 +	0,3845 -					

$$|a-b| = |0,3844 - 0,3753| < 0,01 \Rightarrow \lambda \approx 0,38 \text{ с точност } 0,01.$$

Собственият вектор е решение на хомогенната система:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

При $\lambda = 0,38$ намираме собствен вектор $x = (1; 1,62; 1,62; 1)^T$.

След намиране на някой корен λ^* може да се отдели:

$$G(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{\lambda - \lambda^*}, \text{ а при } - \text{няколко } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s; \quad G(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{\prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)}.$$

$$\text{Имаме: } G_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_1}; \quad G_1(\lambda) = \frac{2 - \lambda}{\lambda - \lambda_1}; \quad G_2 = (2 - \lambda)G_1 - G_0; \quad G_3 = (2 - \lambda)G_2 - G_1;$$

$$G_4 = (2 - \lambda)G_3 - G_2.$$

При $\lambda_1 = 0,38$ изчисляваме:

a	b	$(a+b)/2$	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4
0,5858 _	2 +	1,293 _	1,095	0,774	-0,548	-1,161	-0,273
1,293 _	2 +	1,647 _	0,790	0,279	-0,692	-0,523	0,507
1,293 _	1,647 +	1,47 +	0,917	0,486	-0,659	-0,835	0,216
1,293 _	1,47 +	1,382 _	0,998	0,617	-0,616	-0,998	-0,001
1,382 _	1,47 +	1,426 +	0,956	0,549	-0,641	-0,917	0,115
1,382 _	1,426 +	1,404 +	0,977	0,582	-0,630	-0,958	0,059
1,382 _	1,404 +	1,393 +	0,987	0,599	-0,623	-0,977	0,030
1,382 _	1,393 +	1,388 +	0,992	0,608	-0,620	-0,988	0,015
1,382	1,388						

$$|1,388 - 1,382| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 0,01 \text{ т.е. } \lambda_2 = 1,39, \text{ собствен вектор } x = (-0,99; -0,63; 0,61, 1)^T$$

Аналогично изчислете останалите λ и x .

Отговор: $\lambda_3 = 2,61, x = (0,99, -0,63, -0,61, 1)$; $\lambda_4 = 3,62, x = (-1,01, 1,62, -1,62, 1)$.

Задачи за упражнения

За матрицата $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ да се локализируют собствените стойности, да се

уточнят с метода на разполовяване и се пресметнат и техните собствени вектори.

Отговор: $\lambda = 4,46$, $x = (0,9, 0,42, 0,12)^T$; $\lambda = 0,30$, $x = (0,19, -0,7, 1)^T$;

$\lambda = 2,24$, $x = (-0,7, 1,24, 1)^T$.